Nombres complexes 2

Objectifs :

- Connaître la forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ d'un nombre complexe, savoir passer de la forme algébrique $a + ib$ à la forme trigonométrique, et inversement.
- Connaître et savoir utiliser la formule $z\overline{z} = |z|^2$
- savoir effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes

Aperçu historique :

Pour une introduction historique, se référer au chapitre 1.

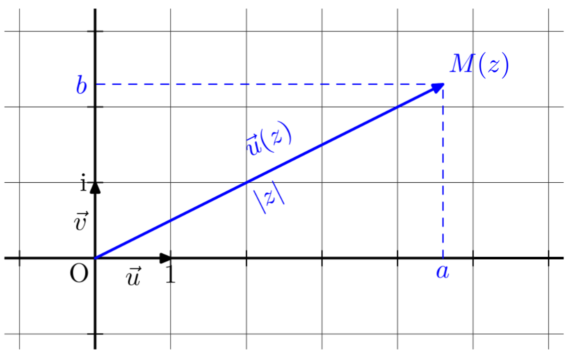
On rappelle que la *forme algébrique* d'un nombre complexe est $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.
Son *conjugué* est $\overline{z} = a - ib$.
Un polynôme du second degré tel que $\Delta < 0$ admet *deux racines complexes* conjuguées l'une de l'autre.

1. Module d'un nombre complexe

A. Définition et interprétation

Définition 3.1 Le *module* d'un nombre complexe z est le réel positif noté $|z|$ et valant $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
Si $z = a + \mathrm{i}b$, on a $|z| = \sqrt{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \sqrt{a^2 - (\mathrm{i}b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque 3.1 (Interprétation géométrique) Soit $z \in \mathbb{C}$; si M est le point du plan complexe d'affixe z alors on a $OM = \sqrt{a^2+b^2}$ car le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé, ainsi le module d'un nombre complexe z est la distance OM où $M(z)$ ou encore la norme du vecteur $\vec{u}$ d'affixe z.



B. Propriétés

Propriété 3.1 Si z est un nombre réel (cas $b = 0$), son module correspond à sa valeur absolue.
Le module du conjugué d'un complexe z est égal au module de z : $|\overline{z}| = |z|$.
Enfin on a $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$.

Propriété 3.2 Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$;
2) si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
en particulier, si $z \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
3) $z\overline{z} = |z|^2$
4) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration 1) $|z \times z'|^2 = (z \times z')(\overline{z} \times \overline{z'}) = z\overline{z}z'\overline{z'} = (z\overline{z}) \times (z'\overline{z'}) = |z|^2|z'|^2$. Un module étant un réel positif, on obtient le résultat annoncé ;

2) on a $|zz'| = |z| \times |z'|$; en posant $z' = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) on obtient $|1| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$ et donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
On a $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ et donc $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$;

3) $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

4) d'une part : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z}$;
d'autre part : $z\overline{z'} + z'\overline{z} = z\overline{z'} + \overline{\overline{(z'\overline{z})}} = z\overline{z'} + \overline{\overline{z'}z} = 2\Re(z\overline{z'}) \leq 2\left|\Re(z\overline{z'})\right| \leq 2|z\overline{z'}| = 2|zz'|$;
enfin : $(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| \geq |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} = |z + z'|^2$.
D'où le résultat.

Exemple 3.1 Calculer les modules des complexes suivants :

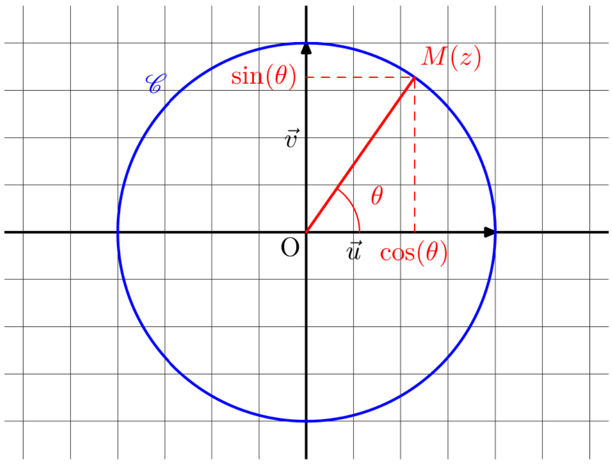
$$z_1 = -3\mathrm{i}; \quad z_2 = (3 + 5\mathrm{i})(11 - 7\mathrm{i}); \quad z_3 = (4 + 3\mathrm{i})^4; \quad z_4 = \frac{5}{(1 - \mathrm{i})^2}$$

Réponses : $|z_1| = 3$; $|z_2| = 34\sqrt{5}$; $|z_3| = 5^4 = 625$; $|z_4| = \frac{5}{2}$

2. Nombres complexes de module 1

A. Présentation : forme trigonométrique

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



Tout nombre complexe z de module 1 est un point de ce cercle trigonométrique ; en effet en notant M le point d'affixe z, si $|z| = 1$ alors $OM = 1$ et donc $M \in \mathscr{C}$. Ce point M peut être repéré par la donnée d'une mesure θ (à 2π-près) de l'angle orienté $\left(\vec{u}; \vec{OM}\right)$.

Définition 3.2 Tout nombre complexe z de module 1 peut donc s'écrire sous la forme $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ cette écriture est appelée *forme trigonométrique* du complexe z de module 1.
On dit que le réel θ est un *argument* du nombre complexe z. Cet argument est défini à 2π-près car c'est une mesure d'angle orienté. On note $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

B. Propriétés

Propriété 3.3 Soit z un nombre complexe de module 1 et M son image dans le plan complexe.

$$M \in (O;\vec{u}) \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi] \text{ et } M \in (O;\vec{v}) \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Propriété 3.4 Soit z et z' deux nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs θ et θ'. Alors :

1) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$;
2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$;
3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$;
4) pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$.

Démonstration 1) $zz' = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') =$
$(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') = \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}(\sin(\theta+\theta'))$.
Donc $\arg(zz') = \theta + \theta'[2\pi]$.

2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)$ (vous pouvez remarquer au passage que si $|z| = 1$ alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$).
Donc $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z[2\pi]$.

3) Comme d'habitude, en combinant les points 1 et 2 démontrés ci-dessus.

4) Par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ et avec le point 2 démontré ci-dessus pour $n \in \mathbb{Z}$.

C. Notation exponentielle imaginaire

Soit f la fonction qui à chaque réel θ associe le nombre complexe de module 1 : $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

$$f : \theta \longmapsto f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

En prolongeant la notion de dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on peut dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(\theta) = \cos'(\theta) + \mathrm{i}\sin'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta) = \mathrm{i}^2\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta = \mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \mathrm{i}f(\theta)$$

Donc f est solution de l'équation différentielle $y' = \mathrm{i}y$ dont les solutions sont les fonctions $g : \theta \mapsto k\exp(\mathrm{i}\theta)$ où $k \in \mathbb{C}$. Or $f(0) = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$ donc on obtient $k = 1$.
Finalement on peut donc écrire :

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Définition 3.3 L'écriture $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est appelée forme exponentielle imaginaire du nombre complexe de module 1 et d'argument θ

3. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

A. Définition

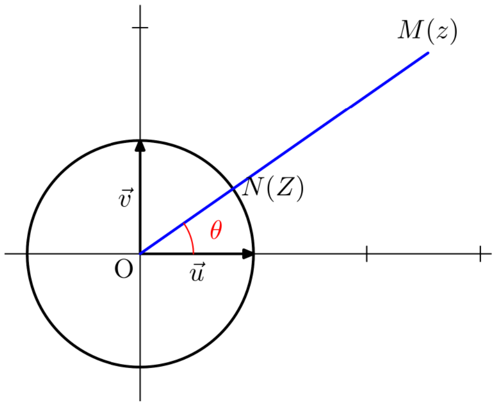
On a vu dans la partie précédente que tout nombre complexe Z de module 1 peut s'écrire $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un argument de Z (à un multiple de 2π-près).
Nous allons maintenant déterminer une écriture semblable pour un complexe non nul quelconque.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit $Z = \frac{z}{|z|}$. On a alors $|Z| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|} \times |z| = 1$. Donc Z est un complexe de module 1, en posant θ son argument, on a $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Et donc finalement en posant $r = |z|$ on obtient :

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Définition 3.4 L'écriture $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est appelée forme exponentielle du nombre complexe z.

Définition 3.5 Soit z un nombre complexe non nul.
On appelle argument de z l'argument du complexe de module 1 $\frac{z}{|z|}$. Cet argument est défini à un multiple de 2π près.
Le nombre complexe nul n'a pas d'argument.

Interprétation géométrique
On note respectivement M et N les images de z et $Z = \frac{z}{|z|}$. On a $z = \lambda Z$ (en posant $\lambda = |z| \in \mathbb{R}$) donc les vecteurs d'affixes z et Z sont colinéaires ; c'est-à-dire que $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ sont colinéaires et de même sens ($\lambda > 0$). Ainsi, $\theta = \left(\vec{u}, \vec{ON}\right) = \left(\vec{u}, \vec{OM}\right)$.



Exemple 3.2 Déterminer la notation exponentielle de 4, -3, $1+\mathrm{i}$ et $-\sqrt{2}\mathrm{i}$.
Réponses : $4 = 4e^{0i}$; $-3 = 3e^{i\pi}$; $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $-\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Remarque 3.2 Un nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ a donc trois écritures possibles :
- l'écriture algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$;
- l'écriture trigonométrique : $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$;
- l'écriture exponentielle : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Remarque 3.3 Les propriétés algébriques des exponentielles restent valables pour les exponentielles imaginaires, ainsi pour θ et θ' réels et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}; \quad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$$

B. Propriétés

Propriété 3.5 Soit $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ deux nombres complexes non nuls. Alors :

1) $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 [2\pi] \end{cases}$;

2) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$;

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$.

Démonstration : Appliquer les propriétés 3.2 et 3.4.

Propriété 3.6 (Passage d'une forme à l'autre) Soit $z = a + \mathrm{i}b = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$. Alors :

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}; \quad \cos(\theta) = \frac{\Re(z)}{|z|} = \frac{a}{r}; \quad \sin(\theta) = \frac{\Im(z)}{|z|} = \frac{b}{r}$$

Exemple 3.3 Soient $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_3 = -\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Placer l'image M_1 de z_1 dans le plan complexe. Calculer ensuite son module et son argument (on donnera la valeur appartenant à $]-\pi\,;+\pi]$). Donner l'écriture algébrique de z_1.
2. Calculer $|z_2|$ et donner l'argument de z_2 compris dans $]-\pi\,;+\pi]$. Donner l'écriture exponentielle de z_2.

3. Même question pour z_3.

Réponses : $|z_1| = 2$; $arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$; $z_1 = 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 + \sqrt{3} i$
$|z_2| = 4$; $arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}$; $z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$|z_3| = \sqrt{3}$; $z_3 = \sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Remarque 3.4 (Nouvelle écriture des propriétés opératoires) Soit $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ deux complexes non nuls et $p \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}; \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}; \quad (z_1)^p = r_1^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta_1}; \quad \overline{z_1} = r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$$

Exemple 3.4 Donner la forme exponentielle de $z_1 = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et de $z_2 = \frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{3+3\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

Réponses :$z_1 = e^{i\pi} \times 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$z_2 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\frac{2(i+1)}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{2}{3\sqrt{2}}e^{i(\frac{-\pi}{12})}$

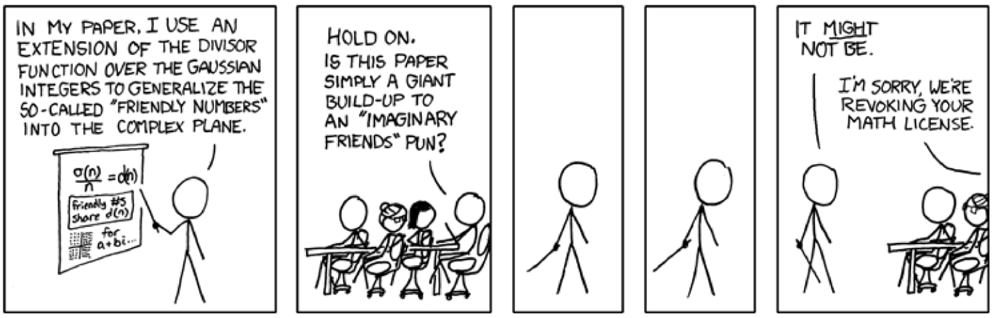
C. Formules d'EULER

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$. Cette expression est appelée formule d'EULER. En prenant $x = \pi$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}$$

Cette dernière égalité est appelée identité d'EULER .
On déduit de la formule d'EULER les deux expressions suivantes :

$$\boxed{\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}}$$



XKCD.com